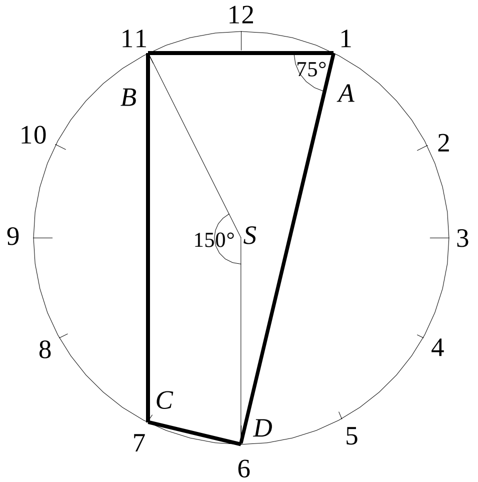
ROVINNÁ GEOMETRIE

1.1. Vypočítej velikosti všech vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku ABCD a velikosti úhlů sevřených jeho úhlopříčkami. Vrcholy čtyřúhelníku leží v bodech, které na obvodu ciferníku hodin znázorňují údaje 1, 6, 7, 11.

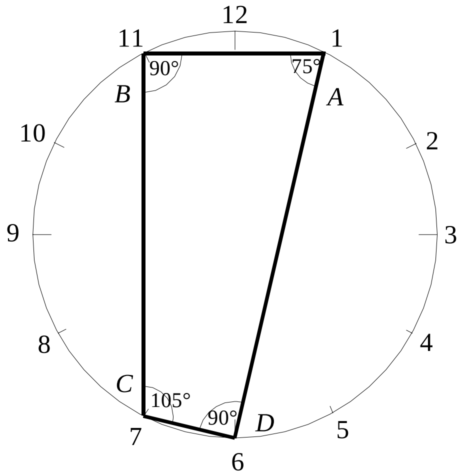
ŘEŠENÍ:

Klasická úloha na obvodové a středové úhly v kružnici.

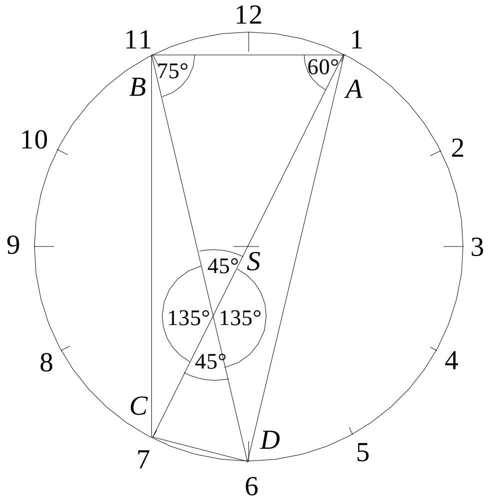
Tětivový čtyřúhelník je tvořen čtyřmi tětivami jedné kružnice. Tzn. že všechny jeho vrcholy leží na této kružnici.



Nejprve určíme velikosti úhlů u vrcholů. Úhel u vrcholu *A* je obvodový úhel a jeho velikost je proto polovinou velikosti středového úhlu *BSD*. Středový úhel je 150° (5 ·30°) a k němu obvodový 75°. Podobně určíme velikost ostatních úhlů.



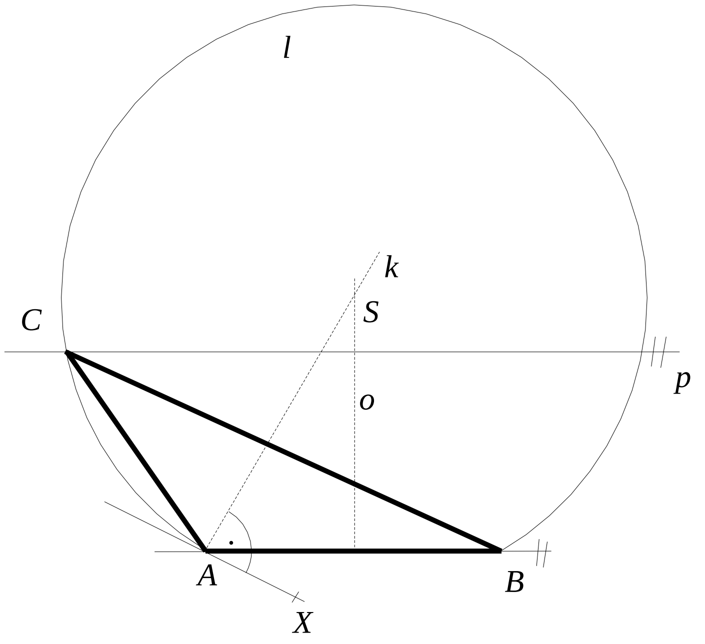
Úhel u vrcholu *B* je obvodový úhel ke středovému úhlu *ASC*. To je úhel přímý a proto obvodový je pravý. V tomto případě se jedná o úhel nad přeponou (Thaletova kružnice).



Abychom mohli určit velikost úhlů, které svírají úhlopříčky, musíme nejprve určit velikost úhlů *CAB* a *ABD*. A to jsou opět obvodové úhly a jejich velikost je polovina velikosti středových úhlů *CSB* resp. *ASD*. Zbytek již snadno dopočítáme z obrázku.

1.2. Sestroj trojúhelník ABC, pro který platí: $|AB| = 6$ cm, $v_c = 4$ cm, $\gamma = 30°$.

ŘEŠENÍ:



Sestrojovaná kružnice se nazývá ekvigonála.

Nad jakoukoli úsečkou AB umíme sestrojit oblouk kružnice tak, že všechny body X ležící na tomto oblouku vytváří úhel AXB zadané hodnoty, v našem příkladu 30°. Postup konstrukce této množiny bodů s danou vlastností (nazvěme ji třeba G) popisují kroky 1. až 6.

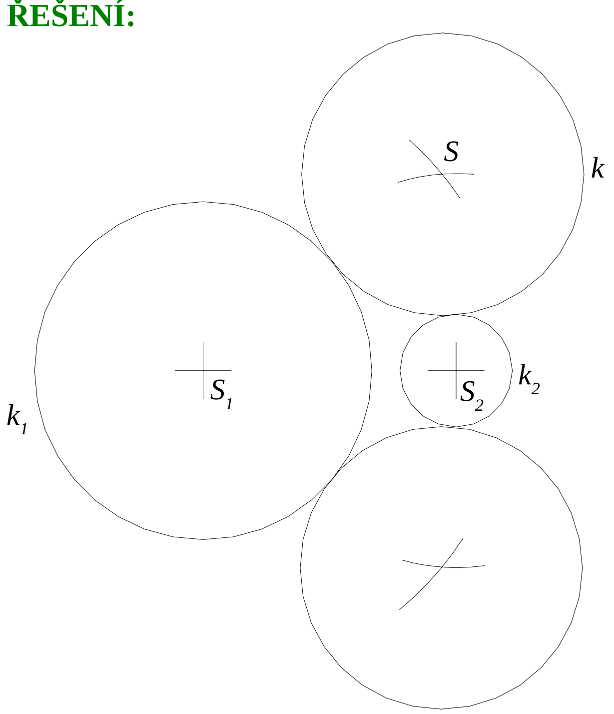
Postup konstrukce:

1. $AB;\ |AB| = 6$ cm
2. $\overrightarrow{AX};\ |\angle BAX| = 30°$
3. $k;\ k \perp AX,\ A \in k$
4. $o;$ osa úsečky AB
5. $S;\ S \in k \cap o$
6. $l;\ l(S;\ r = |AS|)$
7. $p;\ p \parallel AB,\ |p, AB| = 4$ cm
8. $C;\ C \in p \cap l$
9. ABC

Úloha má dvě řešení pro pořadí vrcholů v kladném geometrickém směru (ABC).

1.3. Jsou dány kružnice $k_1(S_1;$ 6 cm) a $k_2(S_2;$ 2 cm), vzdálenost středů S_1 a S_2 je 9 cm. Sestroj všechny kružnice s poloměrem 5 cm, které se dotýkají k_1 i k_2.

ŘEŠENÍ:



Máme-li sestrojit kružnici, potřebujeme znát její střed a poloměr. Poloměr je zadán, zbývá najít její střed. Co o něm víme? Od kružnice k_1 i od kružnice k_2 je vzdálen 5 cm. Od středů těchto kružnic je vzdálen 11 cm a 7 cm. Při konstrukčním řešení použijeme soustředné kružnice s k_1 a k_2. Označíme je k_3 a k_4. Průnik kružnic k_3 a k_4 je hledaný střed.

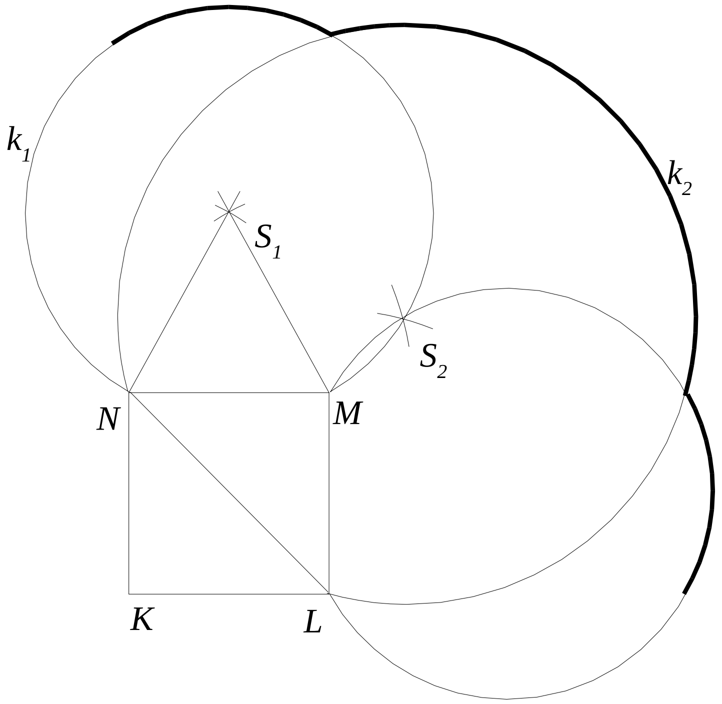
Postup konstrukce:

1. $k_3(S_1;$ 11 cm)
2. $k_4(S_2;$ 7 cm)
3. $S;\ S \in k_3 \cap k_4$
4. $k(S;$ 5 cm)

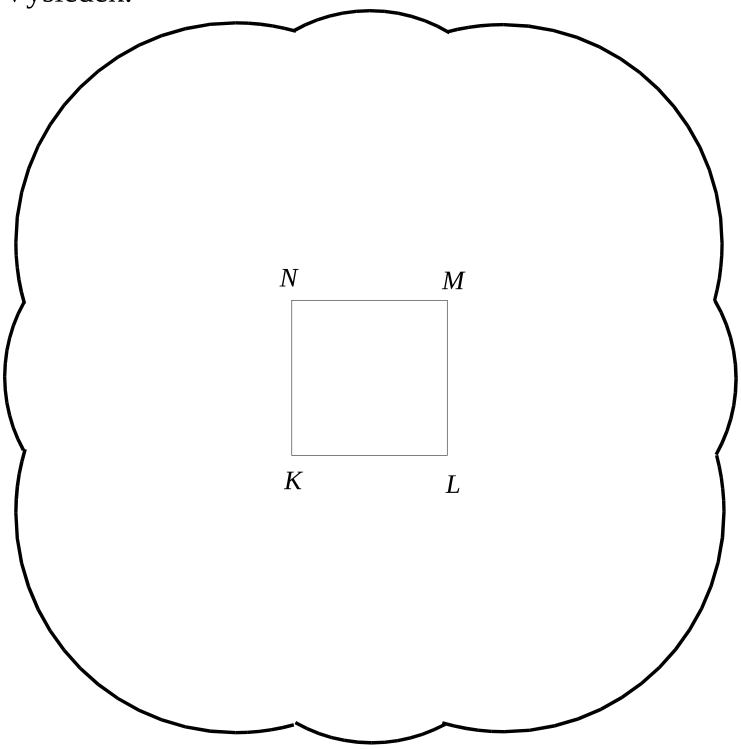
Závěr: Úloha má 2 řešení.

1.4. Narýsuj čtverec KLMN, jehož strana má délku 4,5 cm. Sestroj množinu všech bodů roviny, ze kterých je vidět pod úhlem 30°.

ŘEŠENÍ:



Výsledek:



Abychom viděli čtverec pod úhlem 30°, musíme vidět pod úhlem 30° jeho stranu nebo úhlopříčku. Body hledané množiny musí být vrcholy úhlů, jejichž ramena míří do vrcholů čtverce a jejichž velikost je 30°. Musíme tedy sestrojit množinu *G* (stejný postup jako v příkladu 2), a to nad každou stranou čtverce i nad každou úhlopříčkou. Z obrázku vidíme, že „nad rohem“ čtverce tvoří hledanou množinu body, z nichž „je přímo vidět“ vrcholy tvořící úhlopříčku.

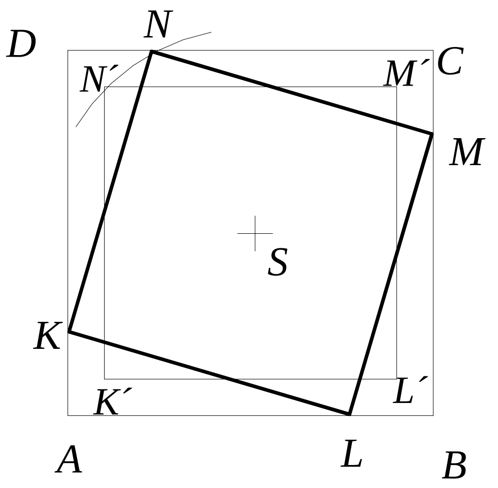
Jedná se opět o vztah mezi středovým a obvodovým úhlem kružnice. Jestliže obvodový úhel je 30°, musí být středový úhel 60°. Tohoto můžeme při postupu využít a rýsovat nad každou stranou a úhlopříčkou rovnostranný trojúhelník, jehož třetí (sestrojený) vrchol tvoří střed hledaného oblouku kružnice.

Postup konstrukce:

1. $KLMN$
2. $l_1; l_1(N; r = |NM|)$
3. $l_2; l_2(M; r = |NM|)$
4. $S_1; S_1 \in l_1 \cap l_2$
5. $k_1; k_1(S_1; r = |S_1N|)$
6. $l_3; l_3(N; r = |NL|)$
7. $l_4; l_4(L; r = |NL|)$
8. $S_2; S_2 \in l_3 \cap l_4$
9. $k_2; k_2(S_2; r = |S_2N|)$

1.5. Do čtverce ABCD se stranou 5 cm, vepiš čtverec KLMN se stranou 4 cm.

ŘEŠENÍ:



Narýsujeme nejprve čtverec *ABCD* a potom čtverec *K´L´M´N´*, tak aby čtverce měly stejný střed a rovnoběžné strany. Abychom dostali vepsaný čtverec, musíme ten vnitřní otočit tak, aby se vrchol *N´* dostal na hranu *CD*. Stačí sestrojit kružnici ve společném středu čtverců s poloměrem $|SN'|$.

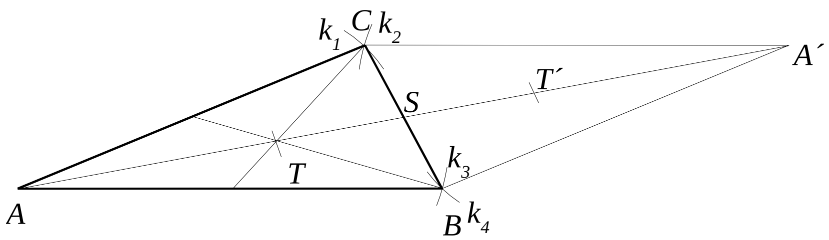
Postup konstrukce:

1. $\square\ ABCD$
2. $S;\ S \in AC,\ |AS| = |CS|$
3. $\square\ K'L'M'N';\ S \in K'M',\ |K'S| = |M'S|, |K'L'| = 4$ cm
4. $k;\ k(S;\ r = |SN'|)$
5. $N;\ N \in k \cap CD$
6. $\square\ KLMN$

Závěr: Úloha má 2 řešení.

1.6. Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno: t_a = 9 cm, t_b = 6 cm t_c = 4,5 cm.

ŘEŠENÍ:



1. $AA';\ |AA'| = 18$ cm $(2 \cdot t_a)$
2. $S;\ S \in AB,\ |AS| = |A'S|$
3. $T, T';\ |AT| = \frac{2}{3}t_a = |A'T'|$
4. $k_1;\ k_1(T;\ r = \frac{2}{3}t_c)$
5. $k_2;\ k_2(T';\ r = \frac{2}{3}t_b)$
6. $C;\ C \in k_1 \cap k_2$
7. $k_3;\ k_3(T;\ r = \frac{2}{3}t_b)$
8. $k_4;\ k_4(T';\ r = \frac{2}{3}t_c)$
9. $B;\ B \in k_3 \cap k_4$
10. ABC

Použijeme metodu doplnění trojúhelníku na rovnoběžník. Rovnoběžník tvoří hledaný trojúhelník *ABC* a „přilepený“ trojúhelník *BA´C*. Oba trojúhelníky jsou shodné. Konstrukci zahájíme úsečkou *AA´* (délka je rovna dvojnásobku těžnice t_a). Na *AA´* najdeme polohu *T* a *T´* (těžiště obou trojúhelníků). U trojúhelníků *TT´C* a *TBT´* známe délky všech tří stran (vycházíme z dělení těžnice těžištěm v poměru 1 : 2).

Závěr: Úloha má 1 řešení.

Otázky, které mohou padnout při maturitní zkoušce:

1) Definuj rovinné obrazce: trojúhelník, čtverec, obdélník, kosočtverec, rovnoběžník, lichoběžník, kruh.
2) Vysvětli pojmy obvodový a středový úhel kružnice.
3) Z jakých částí se skládá řešení konstrukční úlohy v rovinné geometrii?
4) Jaký je rozdíl mezi pojmy planimetrie a stereometrie?